

# STUDY ON THE CONTINUOUS-JUMP BEHAVIOR OF ASSET RETURN VOLATILITY THROUGH THE GJR MODEL

Yumita Cristin Alfagustina<sup>1</sup> , Didit Budi Nugroho<sup>2</sup>, Faldy Tita<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Faculty of Science and Mathematic, Universitas Kristen Satya Wacana, Indonesia

<sup>2</sup> Faculty of Science and Mathematic, Universitas Kristen Satya Wacana, Indonesia

<sup>3</sup> Faculty of Science and Mathematic, Universitas Kristen Satya Wacana, Indonesia

 [662019012@student.uksw.edu](mailto:662019012@student.uksw.edu)

## Abstract

*Generalized Auto-Regressive Conditional Heteroskeasticity (GARCH) is a model used to predict the volatility of returns. Volatility is a statistical measure of the movement of returns for securities (financial instruments that can only be traded through markets or securities companies) or certain market indices. Then the GARCH model was further developed into an asymmetric form, namely conditional volatility and returns have a relationship, namely the GJR model which is an abbreviation of the name (Glosten-Jagannathan-Runkle). This research focuses on the GJR-X by adding high-frequency exogenous variables in volatility process and on the GARCH-CJ which is a decomposition of the exogenous variable X, namely the continuous component C (Continuous) and the jump J (Jump). TOPIX data (Tokyo Stock Price Index) is the real data used in this study. To estimate the model parameters, the ARWM (Adaptive Random Walk Metropolis) method will be used with the MCMC (Markov Chain Monte Carlo) algorithm. First, it was found that the ARWM method is good at estimating parameters. Second, the AIC value of GJR-CJ was smaller than that of GJR-X, which means that GJR-CJ had better data fitting.*

*Keywords: ARWM; GJR; jump; volatility*

## Studi Pada Perilaku Variabel Kontinu-Lompatan Dari Volatilitas Return Aset Melalui Model GJR

### Abstrak

Generalized Auto-Regressive Conditional Heteroskeasticity (GARCH) merupakan model yang digunakan untuk meramalkan volatilitas dari *return*. Volatilitas merupakan sebuah ukuran statistik dari pergerakan return untuk sekuritas (instrumen keuangan yang hanya dapat diperjual belikan melalui pasar atau perusahaan efek) atau indeks pasar tertentu. Model GARCH selanjutnya dikembangkan menjadi bentuk asimetrik (volatilitas bersyarat dan *return* memiliki relasi) yaitu model GJR yang merupakan singkatan dari nama Glosten-Jagannathan-Runkle. Studi ini fokus pada model GARCH-X dengan menambahkan variable eksogen yang berfrekuensi tinggi dan pada model GARCH-CJ yang merupakan dekomposisi dari variable eksogen X, yaitu komponen kontinu C (*Continuous*) dan lompatan J (*Jump*). Data TOPIX (Tokyo Stock Price Index) merupakan data riil yang digunakan dalam penelitian ini. Parameter model diestimasi menggunakan metode ARWM (*Adaptive Random Walk Metropolis*) dalam algoritma MCMC (*Markov Chain Monte Carlo*). Pertama, ini diperoleh bahwa metode ARWM sudah baik dalam mengestimasi parameter. Kedua, nilai AIC dari GJR-CJ lebih kecil daripada GJR-X, yang berarti GJR-CJ memiliki pencocokan data yang lebih baik.

*Kata kunci: ARWM, GJR, lompatan, volatilitas*

## 1. Pendahuluan

Volatilitas merupakan sebuah ukuran statistik dari pergerakan return untuk sekuritas (instrumen keuangan yang hanya dapat diperjual belikan melalui pasar atau perusahaan efek) atau indeks pasar tertentu. Volatilitas dapat diukur dengan menggunakan standar deviasi dari return; biasanya semakin tinggi volatilitas, semakin tinggi risiko di pasar sekuritas untuk manajemen aset [1]. Studi di [2] mengusulkan model Generalized Auto-Regressive Conditional Heteroskeasticity (GARCH) untuk memodelkan dan meramalkan volatilitas dari return. Model GARCH bekerja secara efisien dalam menangkap fluktuasi reguler dalam volatilitas dari data keuangan. Sebagai konsekuensi dari efektivitasnya dalam menangkap perubahan yang sering terjadi dalam volatilitas data keuangan, penggunaan model GARCH di sektor keuangan telah meningkat dalam beberapa tahun terakhir [3].

Selanjutnya di [4], model GARCH dikembangkan menjadi model GJR yang bersifat asimetris, yaitu adanya relasi antara return dan volatilitas bersyarat. Menurut studi di [5] dan [6], model GJR umumnya berkinerja lebih baik daripada spesifikasi GARCH. Dengan demikian, karakteristik asimetrik mengarah pada peningkatan kinerja pemodelan dan peramalan. Pengembangan model GARCH dengan versi yang berbeda diberikan di [7] dengan mengusulkan model GARCH-X yang diperoleh dengan cara menambahkan data berfrekuensi tinggi (seperti 30 detik, 1 atau 5 menit) sebagai variabel eksogen dalam persamaan dinamika volatilitas. Model tersebut selanjutnya dikembangkan dalam studi [8] menjadi model GARCH-CJ dengan cara mendekomposisi variabel eksogen X menjadi dua komponen, yaitu komponen kontinu C (continuous) dan lompatan J (jump). Model tipe GARCH-CJ memiliki peramalan yang jauh lebih baik daripada model GARCH dan GARCH-X.

Termotivasi oleh studi-studi di atas, studi ini fokus pada model bertipe GJR-CJ yang merupakan dekomposisi dari variabel X menjadi C (Continu) dan J(Jump) yang belum pernah dipeleajari dalam studi sebelumnya. Data TOPIX(Tokyo Stock Price Index) merupakan data riil yang digunakan dalam penelitian ini. Penelitian ini terfokus pada model GJR-X dan GJR-CJ. Tujuan dari penelitian ini yaitu memperoleh cara untuk mengestimasi model-model yang dipelajari. Kemudian juga mendapatkan model yang lebih umum dan memberikan pencocokan data yang lebih baik.

## 2. Literatur Review

Berikut merupakan tinjauan Pustaka untuk mendukung penelitian

### a. GJR, GJR-X & GJR-CJ

Model GJR merupakan salah satu tipe asimetris dari model GARCH(1,1). Model GJR pada dasarnya adalah perluasan dari model GARCH dengan tambahan satu parameter untuk merespon *return* sebelumnya. Model GJR(1,1) dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} R_t &= \sigma_t \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim N(0,1) \\ \sigma_t^2 &= \omega + (\alpha_1 + \alpha_2 I_{t-1}) R_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

dimana

$$I_{t-1} = \begin{cases} 0 & \text{jika } R_{t-1} \geq 0 \text{ (good news)} \\ 1 & \text{jika } R_{t-1} < 0 \text{ (bad news)} \end{cases}$$

dengan syarat  $\omega > 0, \alpha_1 \geq 0, \beta \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + 0.5\alpha_2 + \beta < 1, \gamma > 0$

Model GJR-X merupakan pengembangan dari model GJR dengan cara menambahkan variabel eksogen  $X$  dalam persamaan dinamika volatilitas. Model GJR-X(1,1) dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} R_t &= \sigma_t \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim N(0,1) \\ \sigma_t^2 &= \omega + (\alpha_1 + \alpha_2 I_{t-1}) R_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + \gamma X_{t-1} \end{aligned} \quad (2.13)$$

dimana

$$I_{t-1} = \begin{cases} 0 & \text{jika } R_{t-1} \geq 0 \text{ (good news)} \\ 1 & \text{jika } R_{t-1} < 0 \text{ (bad news)} \end{cases}$$

dengan syarat  $\omega > 0, \alpha_1 \geq 0, \beta \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + 0.5\alpha_2 + \beta < 1, \gamma > 0, \lambda > 0$ .

Sementara itu model GJR-CJ merupakan pengembangan dari model GJR-X dengan cara mendekomposisi variabel eksogen  $X$  menjadi komponen kontinu  $C$  dan lompatan  $J$ :

$$\begin{aligned} R_t &= \sigma_t \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim N(0,1) \\ \sigma_t^2 &= \omega + (\alpha_1 + \alpha_2 I_{t-1}) R_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + \gamma C_{t-1} + \lambda J_{t-1}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

dengan syarat seperti di model GJR-X dan  $\gamma > 0, \lambda > 0$ .

## b. Indeks Harga Saham

Indeks harga saham merupakan salah satu indikator yang menggambarkan pergerakan harga saham. Indeks menjadi salah satu pedoman bagi investor dalam mempertimbangkan berinvestasi di pasar modal terutama saham [9]. Bursa Efek Tokyo yaitu TSE (Tokyo Stock Exchange) adalah salah satu dari empat bursa saham terbesar di dunia berdasarkan kapitalisasi pasar [10]. Indeks saham yang akan digunakan dalam studi ini adalah TOPIX (*Tokyo Stock Price Index*).

## c. Metode Estimasi

Model yang diteliti dalam penelitian ini diestimasi dengan suatu metode yang adaptif yaitu ARWM (*Adaptive Random Walk Metropolis*). Metode ARWM dikerjakan dengan menggunakan algoritma MCMC (*Markov Chain Monte Carlo*). Menurut Cai (2020)[11], MCMC adalah metode pengambilan sampel dibawah metode Monte Carlo yang memanfaatkan rantai Markov. MCMC memiliki dua tahap yaitu membangkitkan rantai Markov, kemudian menghitung luaran dari estimasi seperti rerata, simpangan baku, dan interval Bayesian berdasarkan metode dari Monte Carlo.

Metode ARWM merupakan salah satu metode algoritma MCMC yang merupakan penyempurnaan dari metode Random Walk Metropolis (RWM). Metode ini paling banyak digunakan karena paling sederhana. Studi di [12] menunjukkan secara empiris bahwa metode ARWM memiliki kecepatan komputasi dan konvergensi yang tinggi. Secara ringkas, langkah-langkah dari metode ARWM dapat dijelaskan seperti berikut ini. Untuk pengestimasian suatu parameter  $\theta$  pada iterasi ke- $i$ , kandidatnya dibangkitkan melalui persamaan:

$$\theta^{(i)} = \theta^{(i-1)} + \sqrt{\Delta^{(i)}} z^{(i)}, z^{(i)} \sim N(0,1), \quad (2.19)$$

dimana  $\Delta^{(i)}$  sebagai lebar langkah. Berdasarkan pendekatan Bayesian, distribusi posterior untuk data pengamatan  $y$  bersyarat parameter  $\theta$  dihitung menggunakan rumus [13]:

$$\ln p(\theta|y) = \mathcal{L}(y|\theta) + \ln p(\theta), \quad (2.20)$$

yang mana  $p(\theta)$  adalah distribusi *prior* (awal) untuk  $\theta$ . Kandidat  $\theta^{(i)}$  akan diterima jika  $\frac{p(\theta^{(i)}|y)}{p(\theta^{(i-1)}|y)} > u$ , untuk  $u \sim U(0,1)$ , dimana  $U$  menyatakan distribusi *uniform*. Selanjutnya,  $\Delta^{(i)}$  akan berubah secara adaptif berdasarkan rumus:

$$\Delta^{(i)} = \Delta^{(i-1)} + \frac{m-0,44}{i^{0,6}} \quad (2.21)$$

yang mana  $m$  menyatakan frekuensi dari penerimaan kandidat.

Setelah rantai Markov dari parameter  $\theta$  diperoleh melalui pembangkitan sebanyak  $M$  iterasi, langkah selanjutnya adalah menghitung statistik deskriptif sebagai luaran dari MCMC. Statistik deskriptif tersebut antara lain rata-rata, simpangan baku, dan interval kepercayaan Bayesian. Pada penelitian ini, interval HPD (*Highest Posterior Density*) sebagai interval kepercayaan Bayesian dengan mengikuti pendekatan dari [14].

#### d. Pemilihan Model

Selanjutnya akan dilakukan pemilihan model dari beberapa model yang dipelajari pada studi ini. Kesesuaian pencocokan dari model didasarkan pada nilai AIC (*Akaike Information Criterion*) yang diusulkan dalam studi [15]. Nilai statistik AIC dinyatakan sebagai berikut [16]:

$$AIC = -2 \ln L + 2k, \quad (2.22)$$

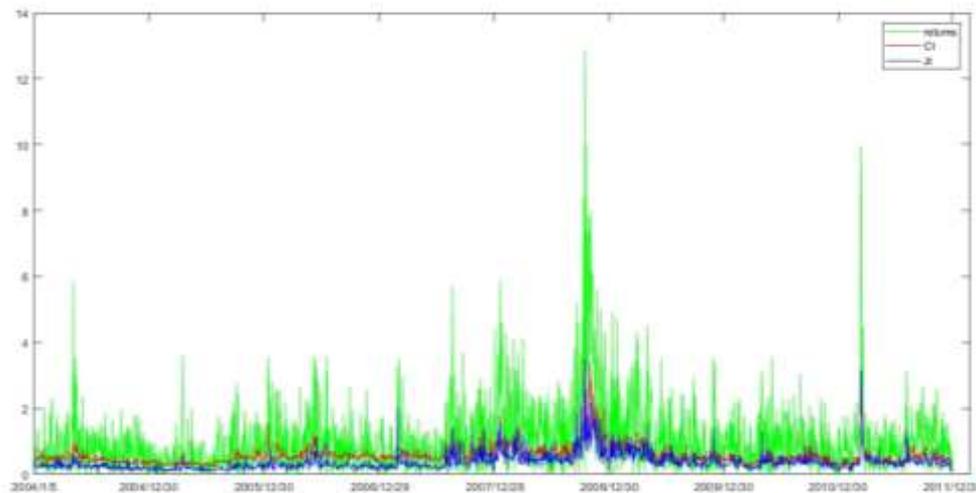
yang mana  $k$  menyatakan banyaknya parameter dari model yang diestimasi dan  $L$  menyatakan nilai *likelihood* dari model. Pencocokan data yang lebih baik menurut AIC adalah yang memiliki nilai paling kecil.

### 3. Hasil dan Pembahasan

Bagian ini menyajikan hasil dan pembahasan terkait estimasi dan perbandingan pencocokan data dari model volatilitas GJR-X dan GJR-CJ.

#### a. Deskripsi Data Pengamatan

Gambar 1 menyajikan grafik *return* ( $R_t$ ), komponen kontinu ( $C_t$ ) dan lompatan ( $J_t$ ) dari data TOPIX. Gambar menunjukkan bahwa terjadi beberapa kali perubahan yang ekstrem (lompatan) pada beberapa periode waktu.



**Gambar 1.** Plot return  $|R_t|$ , kontinu ( $C_t$ ), dan lompatan ( $J_t$ ) terhadap periode harian dari indeks saham TOPIX 2004–2011

#### b. Penerapan Metode Estimasi

Berdasarkan aturan Bayes, distribusi prior digabungkan dengan fungsi *likelihood* untuk membentuk distribusi posterior. Untuk menjalankan algoritma MCMC, nilai-nilai awal untuk parameter model ditetapkan sebagai berikut:

$$\omega^{(0)} = 0,005, a_1^{(0)} = 0,05, a_2^{(0)} = 0,1, \beta^{(0)} = 0,7, \gamma^{(0)} = 0,1, \lambda^{(0)} = 0,5.$$

Banyaknya iterasi MCMC untuk rantai Markov yaitu sebanyak 6000, dimana 1000 iterasi pertama dipotong sebagai *burn-in* untuk menghilangkan ketidakstationeran yang disebabkan oleh pemilihan nilai awal yang sembarang.

Sebagai contoh, langkah-langkah MCMC untuk mengestimasi model GJR-CJ diringkas sebagai berikut:

Langkah 1: Membangkitkan rantai Markov.

- (i) Menaksir parameter  $\omega$  menggunakan metode ARWM.
- (ii) Menaksir parameter  $\alpha_1$  menggunakan metode ARWM.
- (iii) Menaksir parameter  $\alpha_2$  menggunakan metode ARWM.
- (iv) Menaksir parameter  $\beta$  menggunakan metode ARWM.
- (v) Menaksir parameter  $\gamma$  menggunakan metode ARWM.
- (vi) Menaksir parameter  $\lambda$  menggunakan metode ARWM.

Langkah 2: Menghitung nilai-nilai statistik seperti rerata, simpangan baku, dan 95% interval HPD.

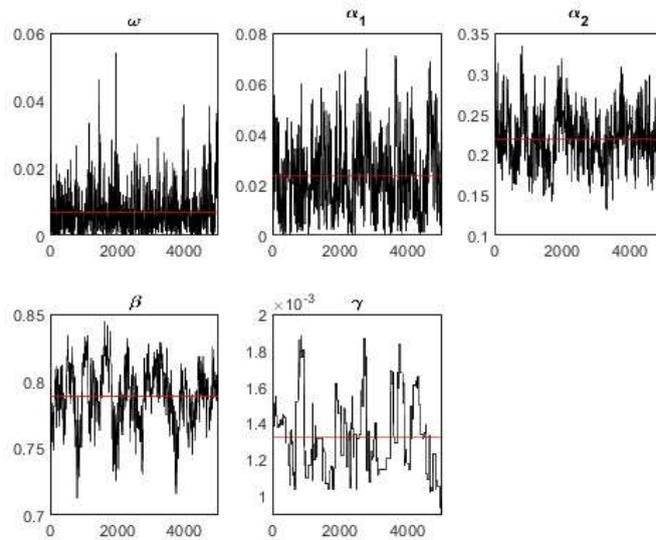
#### c. Hasil Estimasi Parameter

##### 3.3.1 Efisiensi Parameter

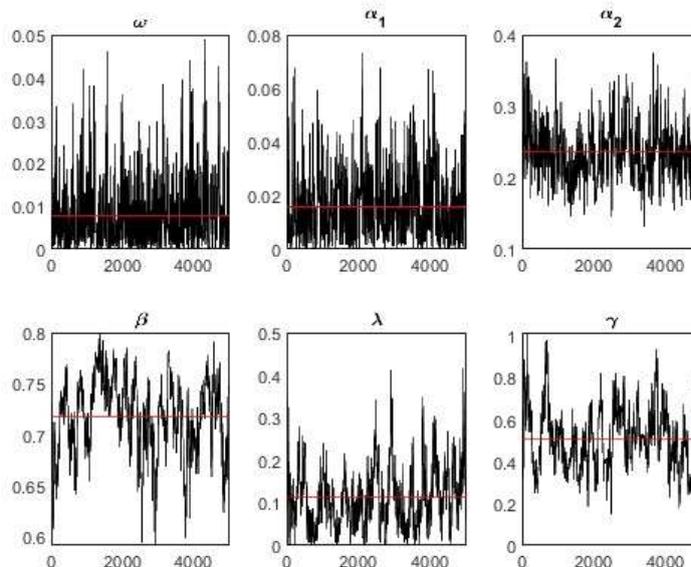
Berdasarkan hasil menjalankan algoritma MCMC, 5000 iterasi yang tersisa digunakan untuk menghitung rerata, simpangan baku, dan 95% interval HPD. Beberapa

metode grafis yang banyak digunakan untuk diagnosis konvergensi MCMC yang paling umum adalah *Trace Plot*. *Trace plot* merupakan plot deret waktu yang menunjukkan realisasi rantai Markov pada setiap iterasi terhadap angka iterasi. Metode grafis ini digunakan untuk memvisualisasikan bagaimana rantai Markov bergerak di sekitar ruang keadaan, yaitu seberapa baik pencampurannya. Jika rantai MCMC macet di beberapa bagian ruang status, *trace plot* yang menunjukkan konvergensi lambat [17].

Sebagai contoh, plot dari nilai-nilai estimasi untuk setiap parameter dari model GJR-X dan GJR-CJ berturut-turut disajikan dalam Gambar 2 dan 3. Setiap grafik memperlihatkan konvergensi estimasi parameter. Meskipun beberapa parameter mempunyai pergerakan yang lambat, tetapi tetap konvergen. Hal ini menunjukkan bahwa metode ARWM sudah baik dalam mengestimasi parameter.



**Gambar 2.** Trace Plot Parameter model GJR-X



**Gambar 3.** Trace Plot Parameter Model GJR-CJ

### 3.3.2 Analisis dari hasil dari Model GJR-X dan GJR-CJ

Tabel 1 menyajikan ringkasan statistik dari estimasi model-model GJR, GJR-X, dan GJR-CJ dengan *error* dari *return* berdistribusi Normal. Pada tabel terdapat rerata, SD (Standar Deviasi), LB (*Lower Bound*) dan UB (*Upper Bound*). Hasil menunjukkan bahwa penambahan variabel kontinu  $C_t$  dan lompatan  $J_t$ , diindikasikan berturut-turut oleh parameter  $\gamma$  dan  $\lambda$ , hanya mempengaruhi perubahan nilai parameter  $\omega$  (jika dibandingkan dengan model GJR-X) dan mempengaruhi perubahan nilai parameter  $\omega, \alpha_1, \beta$  (jika dibandingkan dengan model GJR). Dengan kata lain, ketiga variabel eksogen (RV, kontinu, dan lompatan) tidak mempengaruhi variabel asimetrik  $\alpha_2$ .

**Tabel 1.** Tabel Estimasi Model GJR Berdistribusi Normal

Statistik	Parameter					
	$\omega$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\beta$	$\gamma$	$\lambda$
<b>GJR-X</b>						
Rerata	0.0 069 6	0.023 373	0.219 393	0.7 887 9	0.001 32	-
SD	0.0 065 3	0.014 025	0.031 499	0.0 213 7	0.000 21	-
LB	0.0 000 3	0.000 619	0.160 519	0.7 496 8	0.000 98	-
UB	0.0 196 4	0.049 611	0.280 993	0.8 278 7	0.001 72	-
<b>GJR-CJ</b>						
Rerata	0.0 078 5	0.015 816	0.235 900	0.7 173 7	0.112 55	0.5 108 9
SD	0.0 076 5	0.012 233	0.036 415	0.0 375 6	0.070 61	0.1 445 9
LB	0.0 000 1	0.000 095	0.169 683	0.6 439 7	0.000 72	0.2 436 1
UB	0.0 240 6	0.039 830	0.314 016	0.7 813 2	0.240 94	0.7 916 1

#### d. Pemilihan Model

Tabel 2 menyajikan rerata dan simpangan baku (dalam tanda kurung) dari log-likelihood (LL) dan AIC untuk 20 kali estimasi dari setiap model GJR-X, dan GJR-CJ. Tabel

2 menunjukkan bahwa nilai AIC dari model GJR-CJ lebih kecil dibandingkan nilai AIC dari model GJR-X. Dari simpangan baku masing masing parameter dari setiap model juga dapat disimpulkan bahwa GJR-CJ lebih baik secara signifikan dibandingkan GJR-X. Hasil yang diperoleh ini mendukung penemuan di [8] yang mengatakan bahwa model yang menggagaskan komponen kontinu dan lompatan berpotensi untuk mencocokkan data lebih baik daripada model yang hanya mengagaskan variabel eksogen RV.

Tabel 2. Rerata nilai AIC dan LL dari 20 kali estimasi untuk setiap model Model

Parameter	Model	
	GJR-X	GJR-CJ
LL	-3147,24 (0,27)	-3136,94 (0,19)
AIC	6304,47 (0,54)	6285,87 (0,38)

## 4. Kesimpulan

Penelitian ini mengusulkan perluasan dari model GJR dengan mendekomposisi variabel eksogen menjadi *Continue* dan *Jump*. Metode yang digunakan untuk mengestimasi model adalah metode ARWM dengan menggunakan algoritma MCMC. Secara empiris diperoleh bahwa metode ARWM cukup efisien untuk mengestimasi model-model yang dipelajari. Selain itu, model yang lebih umum dan memiliki pencocokan data yang lebih baik yaitu model GJR-CJ yang memiliki nilai AIC lebih baik daripada model GJR-X.

## Referensi

- [1] SEAI, *Guide to Wall Speak*. 2020. [Online]. Available: [www.seai.ie](http://www.seai.ie)
- [2] T. Bollerslev, "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity," *J. Econom.*, vol. 31, no. 3, pp. 307–327, Apr. 1986, doi: 10.1016/0304-4076(86)90063-1.
- [3] V. Mahajan, S. Thakan, and A. Malik, "Modeling and Forecasting the Volatility of NIFTY 50 Using GARCH and RNN Models," *Economies*, vol. 10, no. 5, pp. 1–20, 2022, doi: 10.3390/economies10050102.
- [4] L. R. Glosten, R. Jagannathan, and D. E. Runkle, "On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks," *J. Finance*, vol. 48, no. 5, pp. 1779–1801, 1993, doi: 10.1111/j.1540-6261.1993.tb05128.x.
- [5] C. Brownlees, R. Engle, and B. Kelly, "A practical guide to volatility forecasting through calm and storm," *J. Risk*, vol. 14, no. 2, pp. 3–22, 2011, doi: 10.21314/JOR.2012.237.
- [6] D. B. Nugroho, T. Mahatma, and Y. Pratomo, "Applying the Non-linear Transformation Families to the Lagged-variance of EGARCH and GJR Models," *IAENG Int. J. Appl. Math.*, vol. 51, no. 4, pp. 1–9, 2021.
- [7] R. Engle, "New frontiers for ARCH models," *J. Appl. Econom.*, vol. 17, no. 5, pp. 425–446, 2002, doi: 10.1002/jae.683.
- [8] H. Zhang and Q. Lan, "GARCH-type model with continuous and jump variation for stock volatility and its empirical study in China," *Math. Probl. Eng.*, vol. 2014, 2014, doi: 10.1155/2014/386721.

- [9] S. Djamaluddin, R. Ardoni, and A. Herawati, "Stock Price Index (CSPD) In Indonesia Stock Exchange (IDX) Period 2014-2018," *Dinasti Int. J. Econ. Financ. Account.*, vol. 1, no. 1, pp. 40–53, 2020, doi: 10.38035/DIJEFA.
- [10] M. Sultonov, "External Shocks and Volatility Overflow among the Exchange Rate of the Yen , Nikkei , TOPIX and Sectoral Stock Indices," 2021.
- [11] G. Cai, "Markov chain monte carlo," pp. 1–9, 2020.
- [12] D. B. Nugroho, "Comparative analysis of three MCMC methods for estimating GARCH models," *IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng.*, pp. 0–7, 2018, doi: 10.1088/1757-899X/403/1/012061.
- [13] X.-S. Yang, *Introduction to Algorithms for Data Mining and Machine Learning*. Candice Janco, 2019. [Online]. Available: <https://www.ptonline.com/articles/how-to-get-better-mfi-results>
- [14] M. H. Chen and Q. M. Shao, "Monte carlo estimation of bayesian credible and hpd intervals?," *J. Comput. Graph. Stat.*, vol. 8, no. 1, pp. 69–92, 1999, doi: 10.1080/10618600.1999.10474802.
- [15] H. Akaike, "A New Look at the Statistical Model Identification," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 19, no. 6, pp. 716–723, 1974.
- [16] S. Portet, "A primer on model selection using the Akaike Information Criterion," *Infect. Dis. Model.*, vol. 5, pp. 111–128, 2020, doi: 10.1016/j.idm.2019.12.010.
- [17] V. Roy, "Convergence diagnostics for markov chain monte carlo," *Annu. Rev. Stat. Its Appl.*, vol. 7, pp. 387–412, 2020, doi: 10.1146/annurev-statistics-031219-041300.



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)